CM078: Introdução à Topologia (Prova 3)

Prof. Alberto Ramos

Junho de 2018

Nome: ______________________________

Q:	1	2	3	4	5	Total
P:	30	20	30	10	20	110
N:						

Orientações gerais
1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação. Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 .... $\boxed{30}$

(a) $\boxed{10}$ Seja $C \subset \mathbb{R}$. Mostre que C é conexo se, e somente se C é um intervalo.

(b) $\boxed{10}$ Prove que, para $n > 1$, a esfera $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\}$ não é homeomorfa a S^1.

(c) $\boxed{10}$ Prove que $X \times Y$ é conexo se, e somente se X e Y são conexos.

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Seja $f : X \to Y$. Mostre que f é contínua se, e somente se para toda net (x_α) com $x_\alpha \to x$ temos que $(f(x_\alpha))$ converge a $f(x)$.

Questão 3 .... $\boxed{30}$

Seja X um espaço de Hausdoff. Prove que são equivalentes:

(a) $\boxed{20}$ X é normal

(b) $\boxed{10}$ Para toda cobertura finita de abertos $\{U_i : i = 1, \ldots, n\}$ de X, existem funções contínuas $f_i : X \to [0, 1]$ tais que $f_i(y) = 0$, $\forall y \notin U_i$, $\forall i$ e $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$, para todo $x \in X$. [1]

Questão 4 .... $\boxed{10}$

Seja X um espaço topológico com a propriedade que toda função contínua com valores reais limitada definida sobre um conjunto fechado, possue uma extensão continua a todo X. Mostre que se X é um espaço de Tychonoff, então X é normal.

Questão 5 .... $\boxed{20}$

Escolha uma das seguintes afirmações.

(a) Seja (X, d) é um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ uma aplicação tal que $d(Tu, Tv) < d(u, v)$ para todo $u, v \in X$, $u \neq v$. Mostre que T possue um único ponto fixo.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma contração. Prove que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida como $g(x) = f(x) - x$, $\forall x \in X$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$.

[1] Dica: Pode usar o fato que se X é normal então dado uma cobertura de abertos $\{O_i : i = 1, \ldots, m\}$, é possível encontrar uma outra cobertura de abertos $\{Q_i : i = 1, \ldots, m\}$ tal que $\overline{Q}_i \subset O_i$, $\forall i = 1, \ldots, m$.